Varianta 021

Subiectul I

a) Dacă z=$(\sqrt{2}+i\sqrt{3})^2$ atunci $\bar{z}=(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2$

b) DE= $2\sqrt{2}$

c) $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ şi cum $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ iar $\cos x>0$ obțin $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow L,M,N$ coliniare

e) Dacă aria pătratului este 100 atunci latura e 10 iar perimetrul 40.

f) Aplicând teorema lui Pitagora obțin că ipotenuza este $\sqrt{5^2+12^2}=13$

Subiectul II

1.a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$

b) Folosind a) obțin $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ şi aşa mai departe $\frac{1}{1\cdot 9}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$;

însumând obțin:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{9\cdot 10}=1-\frac{1}{10}<1$

c) Observând că numai 1 verifică relația obțin că probabilitatea cerută este $\frac{1}{5}$.

d) $3^{x+1}+3^x=12\Leftrightarrow 3^x(3+1)=12\Leftrightarrow 3^x=3\Leftrightarrow x=1$

e) Aplicând relațiile lui Viette obțin că produsul cerut este -24.

2. a) $f'(x)=1-2^{-x}\ln 2$

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x+2^{-x})dx=\frac{1+\ln 2}{2\ln 2}$

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2^x}=\frac{1}{\ln 2}\Leftrightarrow 2^x=\ln 2\Leftrightarrow x=\log_2\ln 2$

care este punct de minim deoarece in stânga sa $f'(x)<0$ şi în dreapta sa $f'(x)>0$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1-\frac{\ln 2}{2}=\frac{2-\ln 2}{2}$

e) Ecuația devine $2^{-x}=2^{-2x}\Leftrightarrow x=0$

Subiectul III

a) $\omega^2=\frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ si $\omega-1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}-1=\frac{1+i\sqrt{3}-2}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ de unde egalitatea $\omega^2=\omega-1$

b) $\omega^3=\omega\cdot\omega^2=\omega\cdot(\omega-1)=\omega^2-\omega=\omega-1-\omega=-1.$

$\omega^6=(\omega^3)^2=(-1)^2=1$

c) $\omega+\bar{\omega}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=1$

$\omega \cdot \overline{\omega} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{1+3}{4} = 1$

d) Fie $\omega^n = 1$ cu n$\in$ $\mathbf{N}^*$. Atunci n=6p+k cu p$\in$ $\mathbf{N}^* si\ \ k=\overline{0,5}$ şi

$\omega^n = 1 \Leftrightarrow \omega^{6p+k} = 1 \Leftrightarrow 1^p \cdot \omega^k = 1 \Leftrightarrow \omega^k = 1$. Cum $k = \overline{0,5}$ convine numai k=0 căci

$\omega^2 = \omega - 1 \neq 1$, $\omega^3 = -1 \neq 1$, $\omega^4 = -\omega \neq 1$, $\omega^5 = \omega^4 \cdot \omega = -\omega^2 = 1 - \omega \neq 1$.

Asadar n=6p cu p$\in$ $\mathbf{N}^*$ adică 6 divide n.

e) Fie n,v$\in$ $\mathbf{Z}[\omega] \Rightarrow (\exists) a, b, a', b' \in \mathbf{Z}$ cu u=a+bω şi v=$a' + b'\omega$. Am

u+v=(a$+a') + (b+b')\omega \in \mathbf{Z}[\omega]$şi

$u \cdot v = a \cdot a' + b \cdot b'\omega^2 + (a \cdot b' + a' \cdot b)\omega = a \cdot a' + b \cdot b'(\omega - 1) + (ab' + a'b)\omega = (a \cdot a' - b \cdot b') +$
$+ (a \cdot b' + a' \cdot b + b \cdot b')\omega \in \mathbf{Z}[\omega]$

f) $1 = 1 + 0 \cdot \omega$; $\omega = 0 + 1 \cdot \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$, $\omega^2 = -1 + \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$, $\omega^3 = -1 + 0 \cdot \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$,

$\omega^4 = -\omega = 0 - \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$, $\omega^5 = \omega^4 \cdot \omega = 1 - \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$. Adică $H \subset \mathbf{Z}[\omega]$.

g) Notez $A = \{z \in Z[\omega] \mid (\exists) y \in Z[\omega]$ astfel încât $y \cdot z = 1$ şi ţinând cont de f) şi de faptul că

$1 \cdot 1 = 1$ si ca $\omega^6 = 1$rezultă că A conţine cel puţin H care are 6 elemente.

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} = g(x)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şi cum $f'(x) < 0 (\forall) x < 0$ şi $f'(x) > 0 (\forall) x > 0$ rezultă că f e strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ si strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

c) Deoarece $f(0) = 0$ şi $f(x) \geq f(0)$ obţin $f(x) \geq 0 (\forall) x \in \mathbf{R}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$

e) $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f'(x)dx = \ln 2$.

f) $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$

$n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

Deci f nu are asimptote către $+\infty$

g) $f(x) + f(2x) = 0 \Leftrightarrow (1+x^2) \cdot (1+4x^2) = 1$

notez $x^2 = y \geq 0$ şi obţin $(1+y) \cdot (1+4y) = 1 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.